Théorème de Pascal

On pose $E = \mathbb{R}^3$. Soient H un plan affine, et $\mathcal{C}$ une conique de H, i.e l'intersection de H et du cône isotrope $\mathcal{C}(q)$ d'une forme quadratique q sur E. Pour tout $m \in H$, on note m^* l'ensemble des droites de H passant par m, qui est une droite projective de $\mathbb{P}(E^*)$.

Pour tout $m \in \mathcal{C}$, on pose $\pi_m : \mathcal{C} \longrightarrow m^*$ qui à $n \in \mathcal{C}$ associe la droite mn, en convenant que $\pi_m(m)$ est la tangente à $\mathcal{C}$ à m.

<u>Lemme :</u> Pour tout $m \in \mathcal{C}$, π_m est bijective. De plus, pour tous $m, n \in \mathcal{C}$, l'application $\pi_n \circ \pi_m^{-1} : m^* \longrightarrow n^*$ est une homographie.

<u>Démonstration :</u>

- Soit $m \in \mathcal{C}$. On va montrer que π_m est bijective.

Soit $D \in m^*$. Alors D intersecte $\mathcal{C}$ en au plus deux points et $m \in D \cap \mathcal{C}$.

On pose alors
$$\mu_m : \begin{array}{ccl} m^* & \longrightarrow & \mathcal{C} \\ D & \longmapsto & \begin{cases} (D \cap \mathcal{C}) \setminus \{m\} & \text{si } |D \cap \mathcal{C}| = 2 \\ m & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$$
, qui est l'inverse de π_m.

Donc π_m est bijective.

- Soient $m, n \in \mathcal{C}$. On va montrer que $\pi_n \circ \pi_m^{-1} : m^* \longrightarrow n^*$ est une homographie.

On commence par supposer $m \neq n$. On choisit alors (mn) comme droite à l'infini, ce qui revient à considérer un plan affine (ne contenant pas O) $\tilde{H}$ dont la direction est le plan vectoriel de E contenant (mn) et O et à regarder la conique $\tilde{\mathcal{C}} = \mathcal{C}(q) \cap \tilde{H}$, qui est alors une hyperbole. Dans $\tilde{H}$, on se donne un repère affine dont le centre est le centre de l'hyperbole, et les axes sont les asymptotes de l'hyperbole.

Dans ce repère, l'hyperbole $\tilde{\mathcal{C}}$ a pour équation $xy = 1$.

Le faisceau m^* est alors l'ensemble des droites parallèles à l'axe des x.

n^* y.

On a alors $\pi_n \circ \pi_m^{-1} : k \cup \{\infty\} \simeq m^* \longrightarrow n^* \simeq k \cup \{\infty\}$. En effet, si $a \in k \cup \{\infty\}$,

$$a \longmapsto 1/a$$

et $D = \{y = a\}$, on a $\pi_m^{-1}(D) = \left(\frac{1}{a}, a\right)$, donc $\pi_n \circ \pi_m^{-1}(D) = \left\{x = \frac{1}{a}\right\}$.

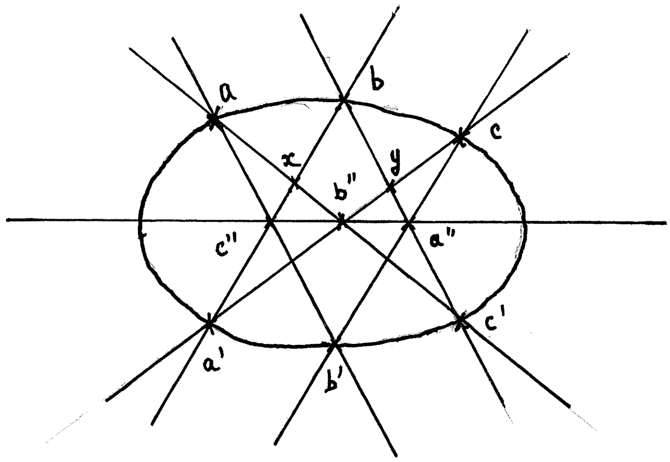
L'application $\pi_n \circ \pi_m^{-1}$ est donc bien une homographie.

<u>Corollaire</u>: Soient $m_1, m_2, m_3, m_4 \in \mathcal{C}$. Le birapport $[mm_1, mm_2, mm_3, mm_4]$ ne dépend pas du choix de $m \in \mathcal{C}$.

<u>Démonstration</u>: Soient $m, n \in \mathcal{C}$. L'application $\pi_n \circ \pi_m^{-1}$ étant une homographie, elle préserve le birapport, ce qui donne :

$$\begin{aligned}[mm_1, mm_2, mm_3, mm_4] &= [\pi_n \circ \pi_m^{-1}(mm_1), \pi_n \circ \pi_m^{-1}(mm_2), \pi_n \circ \pi_m^{-1}(mm_3), \pi_n \circ \pi_m^{-1}(mm_4)] \\ &= [nm_1, nm_2, nm_3, nm_4]\end{aligned}$$

<u>Théorème (Pascal)</u>: Soient $a, b, c, a', b', c' \in \mathcal{C}$ deux à deux distincts.
On note $a'' = bc' \cap b'c$, Les points a'', b'', c'' sont alors alignés.
$b'' = ac' \cap a'c$
$c'' = ab' \cap a'b$



Démonstration : On note $x = ac' \cap ba'$.

$y = bc' \cap ca'$

On a $[c'', x, b, a'] = [ac'', ax, ab, aa']$ d'après le corollaire du lemme

$= [ab', ac', ab, aa']$ car les droites mises en jeu sont les mêmes

$= [cb', cc', cb, ca']$ d'après le corollaire du lemme

$= [a'', c', b, y]$

donc $[c'', x, b, a'] = [a'', c', b, y]$. La perspective de centre b'' de ba' sur bc' étant une homographie, elle préserve le birapport. Elle envoie de plus x sur c', a' sur y, b sur lui-même

donc elle envoie c'' sur a'', ce qui prouve que a'', b'', c'' sont alignés.